Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic
Eulerova metoda, RK2 a RK4

Jan Schee
ÚF FPF SU Opava 2012

Pro kalibrování numerických metod je užitečné je testovat v situacích, kdy je známe analytické řešení. Pro tento účel vezměme 1D pohybovou rovnici harmonických kmitů

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -k^2 x$$

Snadno se přesvědčíme, že této obyčejné diferenciální rovnici 2. řádu vyhovuje řešení

$$x(t) = A\sin(kt) + B\cos(kt)$$

Konstanty A a B určíme z daných počátečních podmínek. Vezměme, například $x(t=0)=0$ a $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t|_{t=0} = 1$. Konstanty A a B pak budou rovny

$$A = \frac{1}{k} \quad \text{a} \quad B = 0$$

Mějme ODR prvního řádu

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = F(t, x)$$

Derivace nahradíme rozdílem, tj.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = F(t, x_n), \quad \text{kde je} \quad \Delta x = x_{n+1} - x_n \quad \text{a} \quad \Delta t = t + h - t = h$$

Ze starých hodnot t a x_n obdržíme novou hodnotu x_{n+1} z rovnice

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + h\,F(t, x_n)}$$

Eulerova metoda je motodou s přesností do 1. řádu. Odvoďme nyní přesnější metodu. Vyjdeme z Taylorova rozvoje funkce *x*(t+h) v okolí časového okamžiku *t* a dostáváme

$$x(t+h)=x(t)+x'(t)h+\frac{1}{2}x''(t)h^2+o(h^3)$$

Z diferenciální rovnice plynou následující relace

$$x'(t)=F(t,x) \quad \text{a} \quad x''(x)=F_t(t,x)+F_x(t,x)F(t,x)$$

Dosazením do Taylorova rozvoje máme

$$x(t+h)=x(t)+x'(t)h+\frac{1}{2}h^2\left(F_t+F_xF\right)+o(h^3)$$

$$=x(t)+\frac{1}{2}x'(t)h+\frac{1}{2}h\left(F+F_th+F_xF\,h\right)+o(h^3)$$

Vypočítejme nyní Taylorův rozvoj funkce

$$F(t+h, x+hF(t,x))$$

podle *h* a obdržíme vztah

$$F(t+h, x+hF(t,x)) = F(t,x) + F_t h + F_x F h + o(h^2)$$

ze kterého ihned plyne následující úprava výrazu pro $x(t+h)$, tj.

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{2} F(t,x) h + \frac{1}{2} h F(t+h, x+hF(t,x)) + o(h^3)$$

který pro účely numerické implementace přepíšeme na tvar

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_{2,} \quad \text{kde je} \quad k_1 = hF(t, x_n) \quad \text{a} \quad k_2 = hF(t+h, x+k_1)}$$

Velice efektivní se ukázala RK4 metoda, zejména ve spojení s metodou adaptivního kroku. RK4 se skládá z následujících kroků

$$k_1 = hF(t_n, x_n)$$

$$k_2 = hF(t_n + h/2, x_n + k_1/2)$$

$$k_3 = hF(t_n + h/2, x_n + k_2/2)$$

$$k_4 = hF(t_n + h, x_n + k_3)$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + o(h^5)$$

Inplementujte Eulerův algoritmus a RK4 a numericky řešte pohybovou rovnici harmonických kmitů pro k=1 a počáteční podmínky $x_0=0$ a $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t|_0=1$ na intervalu $t \in [0, 2\pi]$ s dělením intervalu N=100. Na výstupu by měla být tabulka kde v prvním sloupci bude čas t a ve druhém sloupci funkční hodnota $x(t)$. Srovnejte s přesným řešením $x_p(t)=\sin(t)$.

[**Pozn:** difernciální rovnici 2. řádu lze převézt na dvě diferenciální rovnice 1. řádu, tj.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}=F(t,x) \rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=F(t,x) \quad \text{a} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y$$

]