

Hledání kořene transcendentních rovnic
“Bracketing”, metoda bisekce a metoda sečen

Jan Schee

ÚF FPF SU Opava 2012

Definice: Rovnice, jejíž kořen nelze explicitně vyjádřit nazýváme transcendentní rovnice.

Uvažujme například rovnici

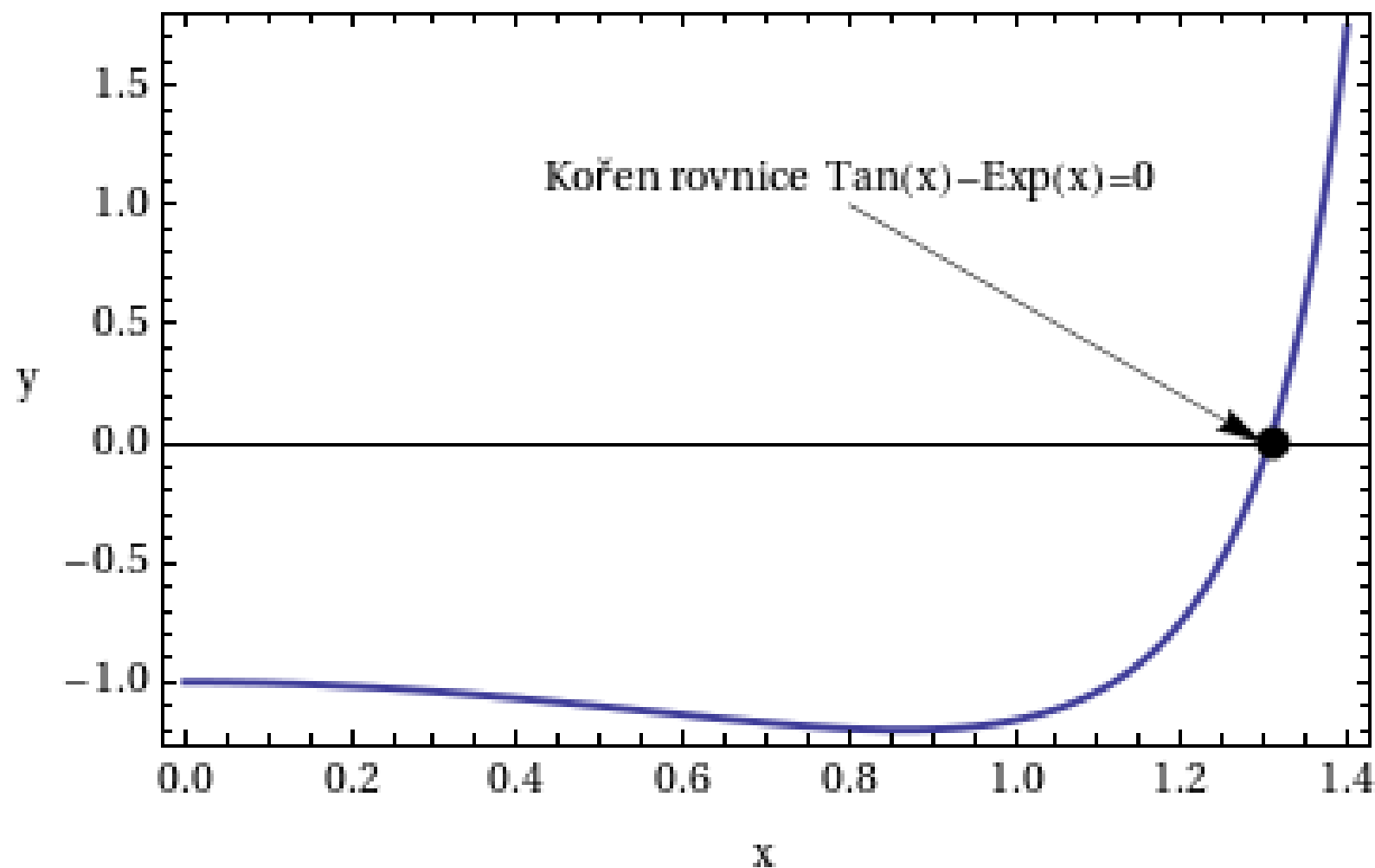
$$\tan(x) - \exp(x) = 0$$

Kořen této rovnice se **nedá** zapsat ve tvaru

$$x_0 = f^{-1}(0)$$

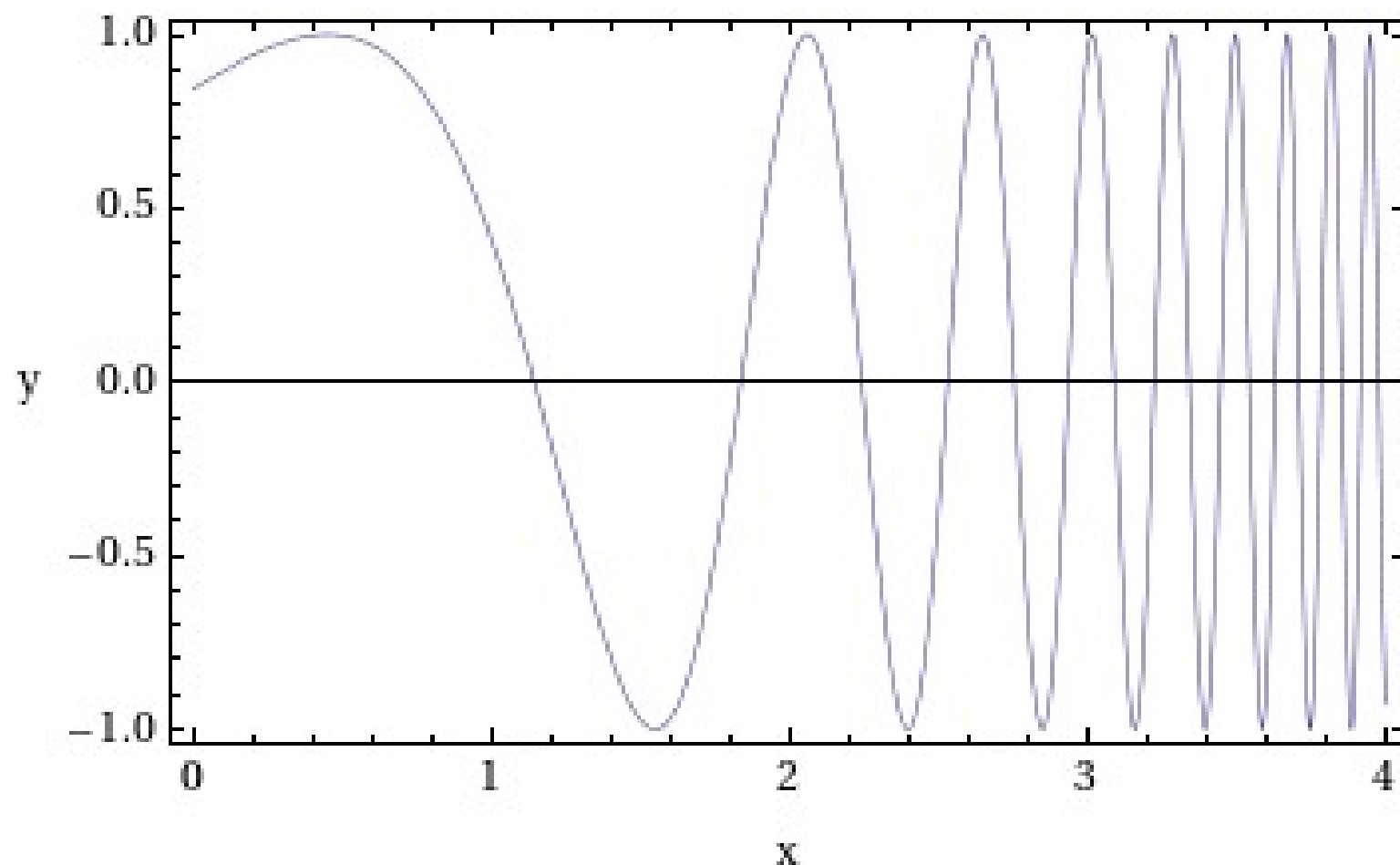
Graf odpovídající funkce

$$f(x) = \tan(x) - \exp(x)$$



Na daném intervalu může být i více než jeden kořen (viz obr).
Kupříkladu funkce

$$f(x) = \sin(\exp(x))$$

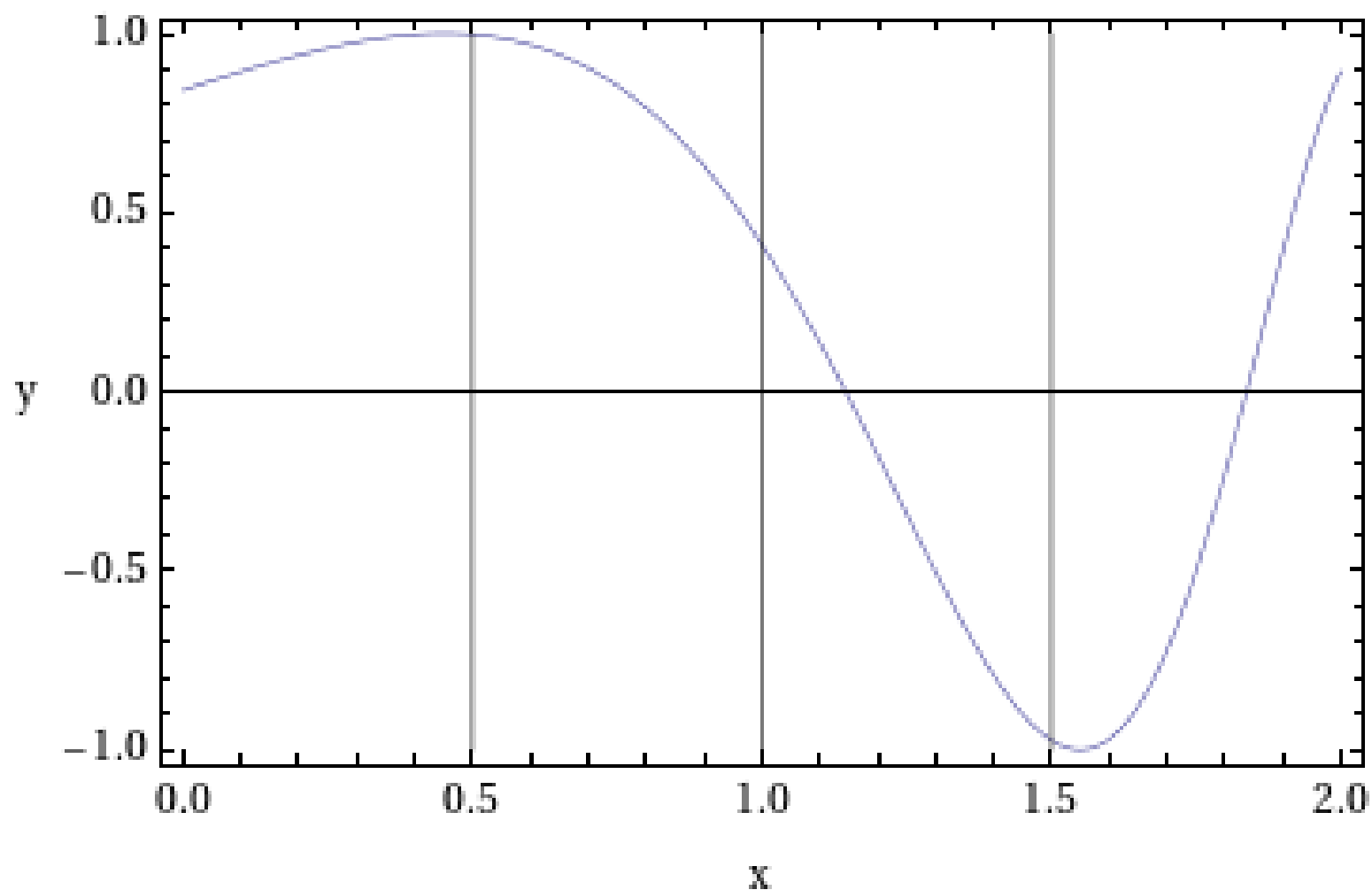


Metody, které umožní určit kořeny transcendentních rovnic $f(x)=0$, prohledávají oblast, $[a,b]$, na které je příslušná funkce $f(x)$ monotonní.

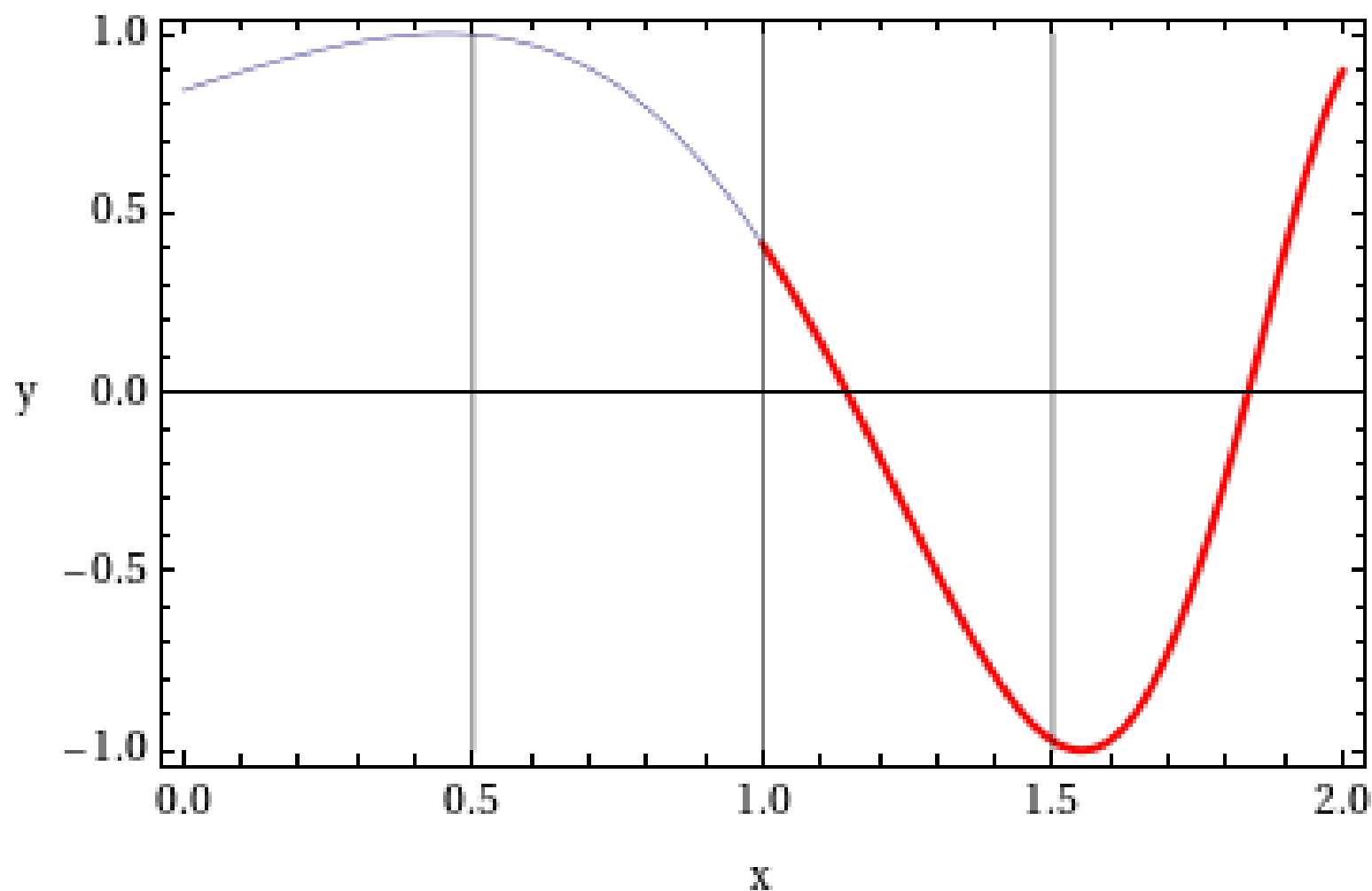
1) Na daném intervalu $[a,b]$ má monotonní funkce jeden kořen, pokud platí $f(a)f(b)<0$

2) Jestliže má funkce v dané oblasti více kořenů, musíme nejprve provést tzv. “bracketing”, tj. Najít intervaly monotónnosti funkce f které obsahují jeden kořen.

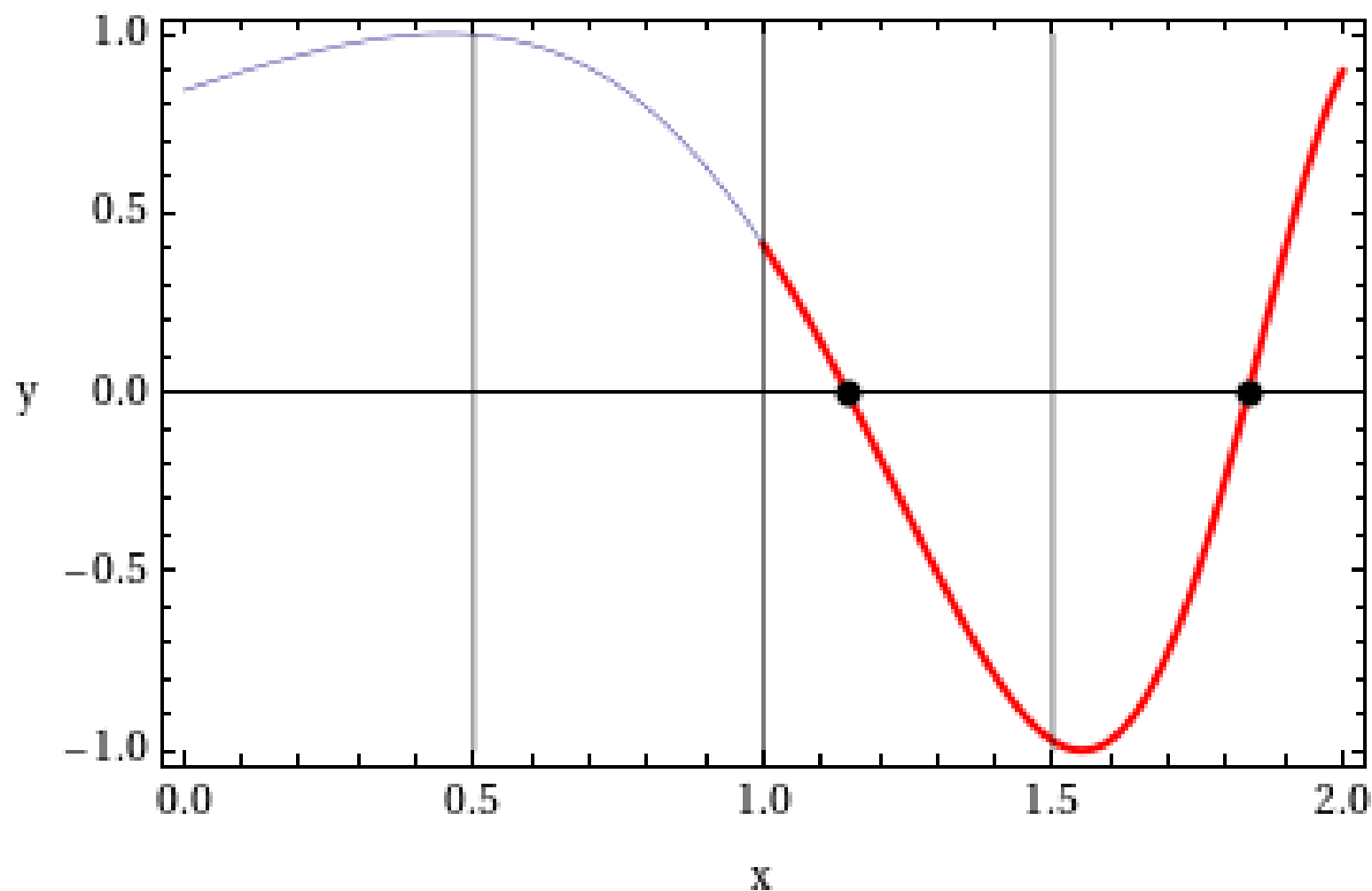
Vezměme si funkci $f(x) = \sin(\exp(x))$
na intervalu $[0, 2]$ a rozdělme tento interval na čtyři stejné dílky.



Vezměme si funkci $f(x) = \sin(\exp(x))$
na intervalu $[0, 2]$ a rozdělme tento interval na čtyři stejné dílky.



Vezměme si funkci $f(x) = \sin(\exp(x))$
na intervalu $[0, 2]$ a rozdělme tento interval na čtyři stejné dílky.



Máme interval $[a,b]$ na kterém analyzujeme funkci f . Tento interval rozdělíme na N stejných dílků. Ukládáme jen ty body intervalu na kterém je splněna podmínka lokální monotónnosti:

$$dx = (b-a) / N$$

$$x1 = b$$

```
for i=1 to N
```

$$x2 = b + i * dx$$

```
  If  $f(x1) * f(x2) < 0$  then
```

```
    uloz(x1, x2)
```

```
  end if
```

$$x1 = x2$$

```
end for
```

Metoda bisekce spočívá na půlení intervalu. Algoritmus je následující:

```
x1=a
```

```
x2=b
```

```
while |x1-x2|>eps and iter<maxiter do
```

```
    x=0.5*(x1+x2)
```

```
    If f(x)*f(x1)<0 then
```

```
        x2=x
```

```
    Else
```

```
        x1=x
```

```
    End if
```

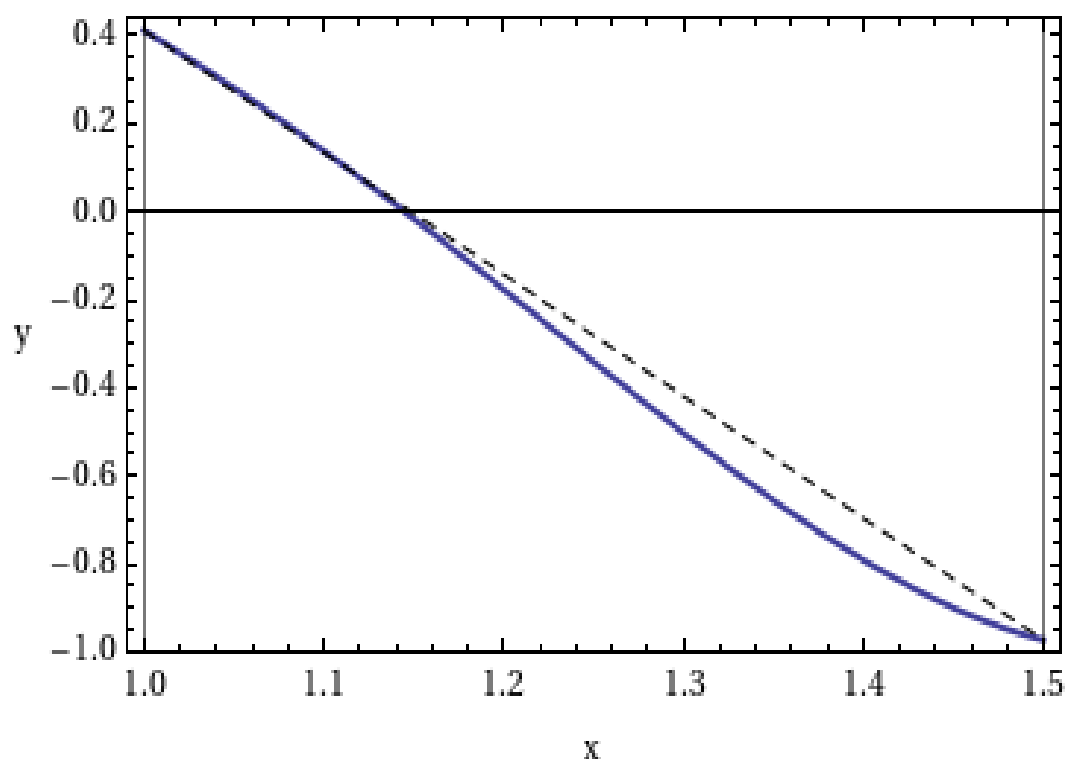
```
    iter=iter+1
```

```
end while
```

Metoda sečen je založena na lineární aproximaci na daném intervalu. Kořen lineární funkce $y = p x + q$ na intervalu $[x_1, x_2]$ leží na

$$x = - \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{y_1 - y_2}$$

kde je $y_i = f(x_i)$.



Postup hledání kořene metodou sečen je následující:

```
y1=f(x1); y2=f(x2); iter=0;
```

```
while(|y2|>eps and |y1|>eps and iter<maxiter) do  
  x=-(y2*x1-y1*x2)/(y1-y2)  
  If f(x)*y1<0 then  
    x2=x  
    y2=f(x2)  
  else  
    x1=x  
    y1=f(x1)  
  end if  
  
  iter=iter+1  
end while
```

Použitím metody bisekce a metody sečen najděte kořeny rovnice

$$\sin[\exp(x)] = 0$$

na intervalu $[0, 2]$. Srovnejte, u obou metod, potřebný počet iterací k nalezení těchto kořenů.