

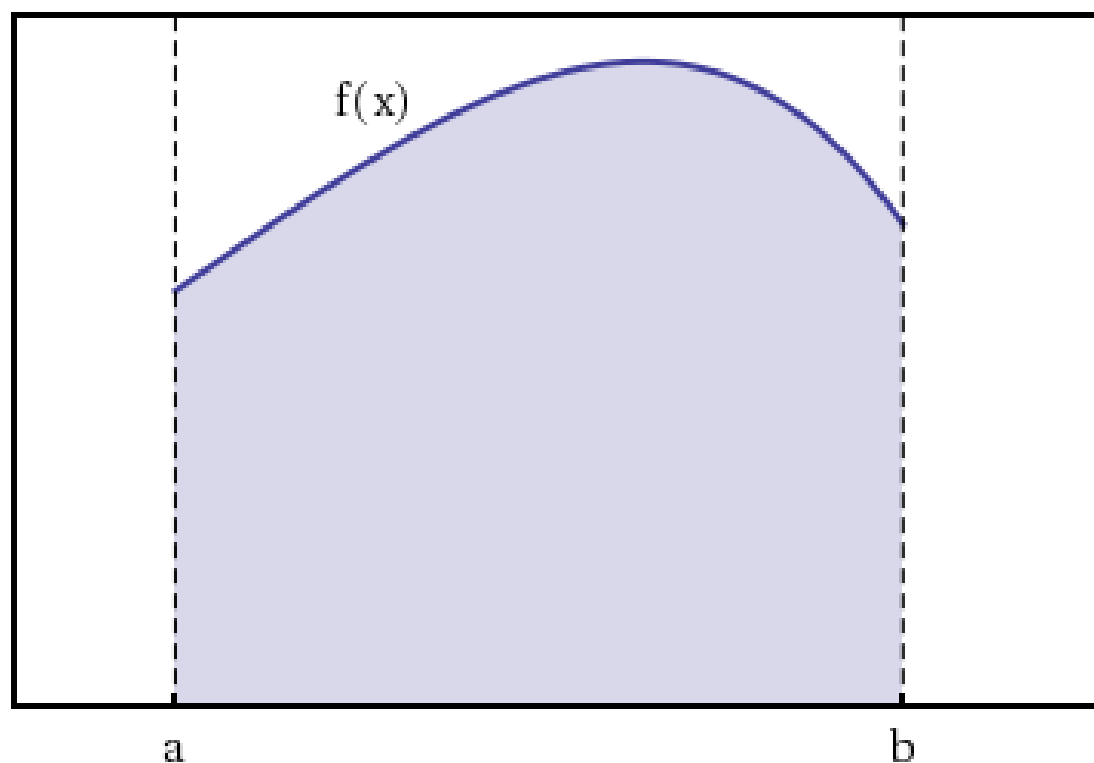
Numerická integrace I/II
Newtonovy-Cotesovy pravidla

Jan Schee
ÚF FPF SU Opava 2012

Newtonův určitý integrál funkce $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ je výraz

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

a jeho hodnota I odpovídá ploše která je shora a zdola vymezená osou x funkcí $f(x)$.



Rozdělením intervalu na N stejných úseků o velikosti h

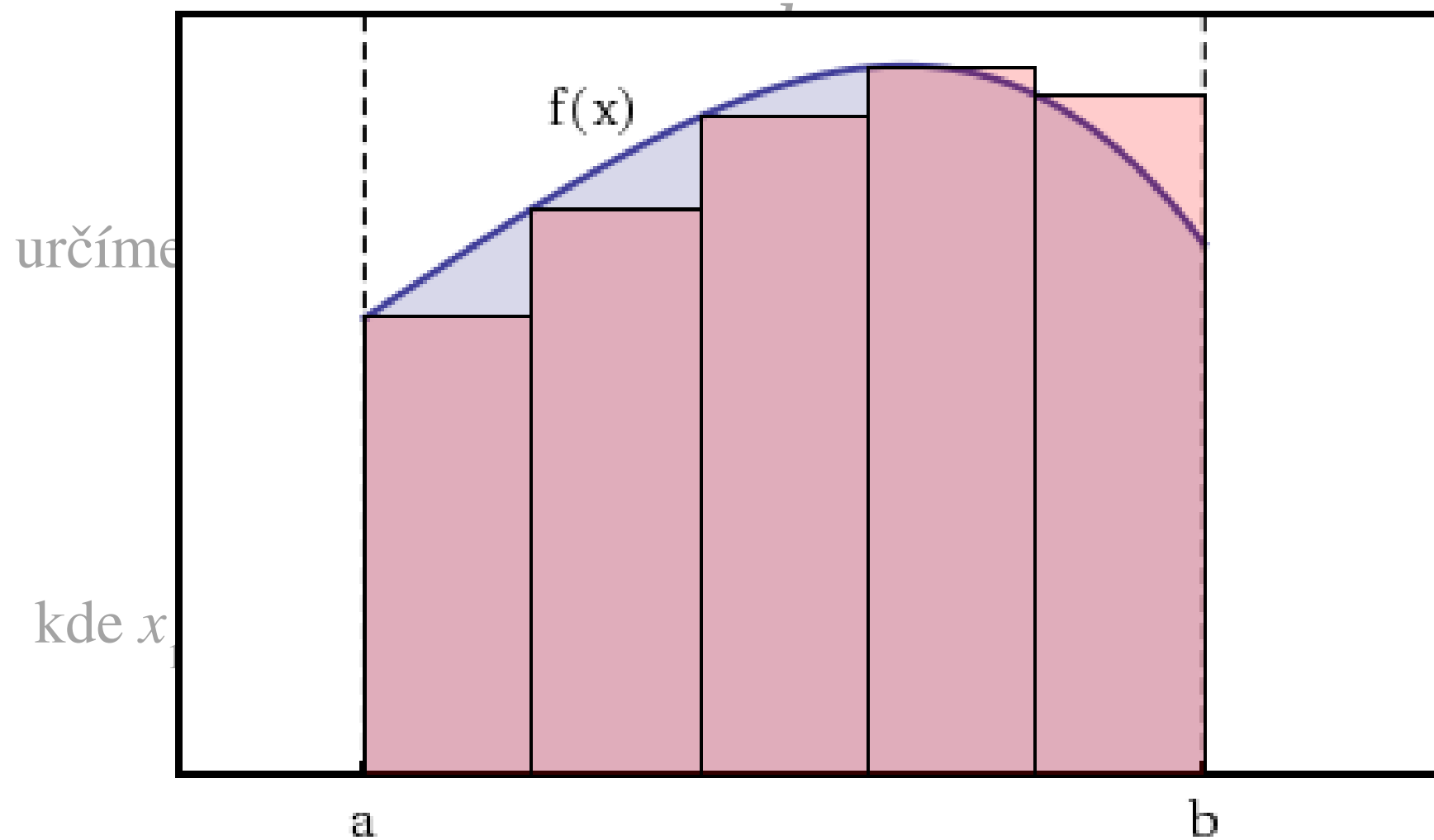
$$h = \frac{b - a}{N} \quad (2)$$

určíme přibližnou hodnotu určitého integrálu I takto

$$\tilde{I} = \sum_{i=1}^N f(x_i) h$$

kde $x_1 = a$ a $x_N = b - h$.

Rozdělením intervalu na N stejných úseků o velikosti h



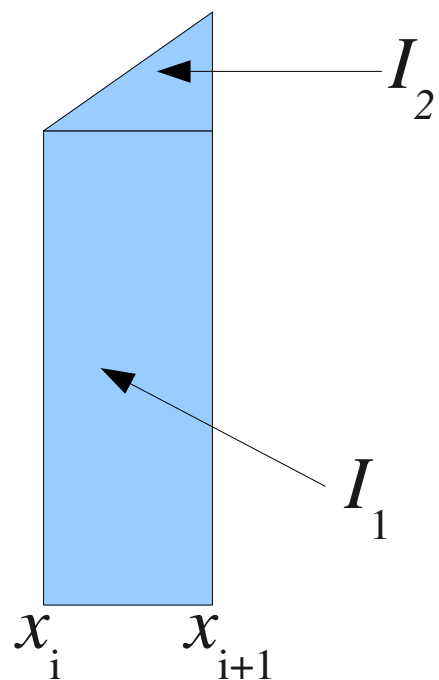
Newtonova-Cotesova pravidla jsou založena na aproximaci funkce $f(x)$ na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ polynomem.

Použitím polynomu 1. řádu – lineární funkce obdržíme
lichoběžníkové pravidlo

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx h \left(\frac{f_i}{2} + \frac{f_{i+1}}{2} \right)$$

kde $f_i = f(x_i)$ a $f_{i+1} = f(x_{i+1})$.

Nechť je funkce $f(x)$ na intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ aproximována lineární funkcí. Plocha pod touto lineární funkcí zřejmě bude



$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 \\
 &= f(x_i)h + \frac{1}{2}(f(x_{i+1}) - f(x_i))h \\
 &= \frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})
 \end{aligned}$$

Simpsonovo pravidlo je založeno na rozdělení intervalu $[x_i, x_{i+1}]$ na dvě části $[x_i, x_i+h/2]$ a $[x_i+h/2, x_{i+1}]$ a aproximací funkce $f(x)$, na daném intervalu polynomem druhého řádu – kvadratickou funkcí.

Simpsonovo pravidlo píšeme ve tvaru

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{3} f_i + \frac{4}{3} f_m + \frac{1}{3} f_{i+1} \right)$$

kde je $f_i = f(x_i)$, $f_{i+1} = f(x_{i+1})$ a $f_m = f((x_i + x_{i+1})/2)$.

Tři body x_i , $m=(x_i+x_{i+1})/2$ a x_{i+1} rozdělují interval $[x_i, x_{i+1}]$ na dvě části. Koeficienty kvadratické funkce určíme ze soustavy

$$\begin{aligned}f(x_i) &= Ax_i^2 + Bx_i + C \\f(m) &= Am^2 + Bm + C \\f(x_{i+1}) &= Ax_{i+1}^2 + Bx_{i+1} + C\end{aligned}$$


kde nalevo je funkce $f(x)$ a napravo aproximační kvadratická funkce.

Nyní spočítejme integrál plynoucí z této aproximace, tj.

$$\begin{aligned}
 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &\approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} (Ax^2 + Bx + C) dx \\
 &= \left[\frac{A}{3} x^3 + \frac{B}{2} x^2 + Cx \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \\
 &= \frac{A}{3} (x_{i+1}^3 - x_i^3) + \frac{B}{2} (x_{i+1}^2 - x_i^2) + C(x_{i+1} - x_i) \\
 &= \frac{A}{3} (x_{i+1} - x_i) (x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2) + \\
 &\quad + \frac{B}{2} (x_{i+1} - x_i) (x_{i+1} + x_i) + C(x_{i+1} - x_i) \\
 &= (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{A}{3} (x_{i+1}^2 + x_i x_{i+1} + x_i^2) + \frac{B}{2} (x_i + x_{i+1}) + C \right)
 \end{aligned}$$

Nyní určíme $f(x_i) + 4f(m) + f(x_{i+1})$ a obdržíme

$$\begin{aligned}
 f_i + 4f_m + f_{i+1} &= Ax_i^2 + Bx_i + C + \\
 &+ 4A\left(\frac{(x_i + x_{i+1})}{2}\right)^2 + 4B\left(\frac{(x_i + x_{i+1})}{2}\right) + 4C + \\
 &+ Ax_{i+1}^2 + Bx_{i+1} + C \\
 &= 6\left[\frac{A}{3}(x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2) + \frac{B}{2}(x_i + x_{i+1}) + C\right]
 \end{aligned}$$



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{(x_{i+1} - x_i)}{6} (f_i + 4f_m + f_{i+1}) = \frac{h}{3} (f_i + 4f_m + f_{i+1})$$

Když použijeme předchozí pravidla $N-1$ krát v celém intervalu integrace $[x_1, x_N]$ pak obdržíme rozšířené formule pro integrál od x_1 do x_N .

Rozšířené lichoběžníkové pravidlo

$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1} + \frac{1}{2} f_N \right) + O \left(\frac{(b-a)^3 f'''}{N^2} \right)$$

Rozšířené Simpsonovo pravidlo

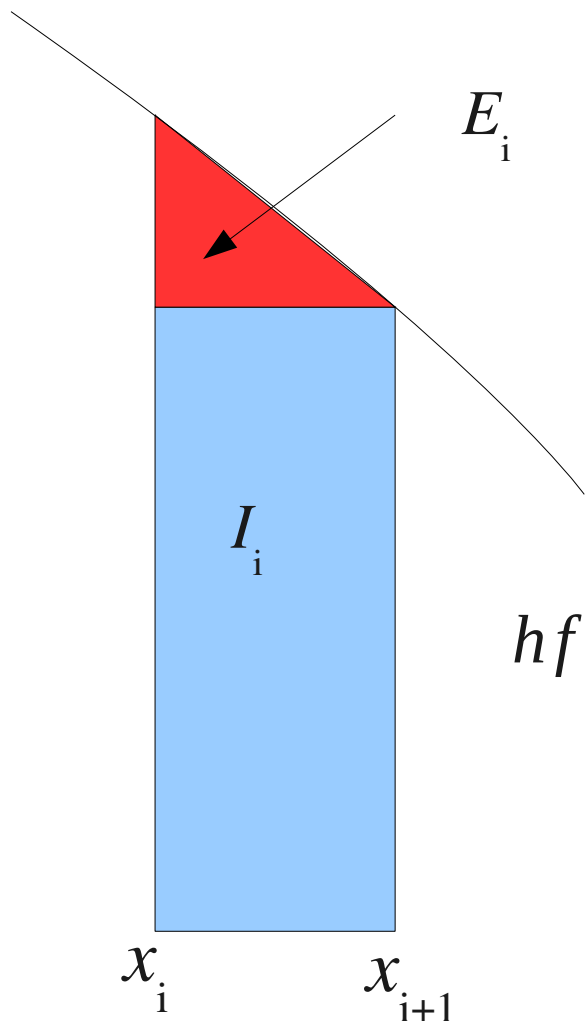
$$\int_{x_1}^{x_N} f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{3} f_1 + \frac{4}{3} f_2 + \frac{2}{3} f_3 + \frac{4}{3} f_4 + \dots + \frac{2}{3} f_{N-2} + \frac{4}{3} f_{N-1} + \frac{1}{3} f_N \right) + O \left(\frac{1}{N^4} \right)$$

Použitím výše zavedených pravidel určete integrál

$$I = \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx$$

a srovnejte výsledky použití Lichoběžníkového pravidla a Simpsonova pravidla s přesným výsledkem.

Odvození chyby obdelníkové metody pomocí integrace per partes.

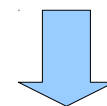


$$\left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{i=1}^N f(x_i) \right| < \frac{K}{2} \frac{(b-a)^2}{N} = E_{tot}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \int_0^h f(t+x_i) dt =$$

$$\left[(t+A) f(t+x_i) \right]_0^h - \int_0^h (t+A) f' dt = |A=0| =$$

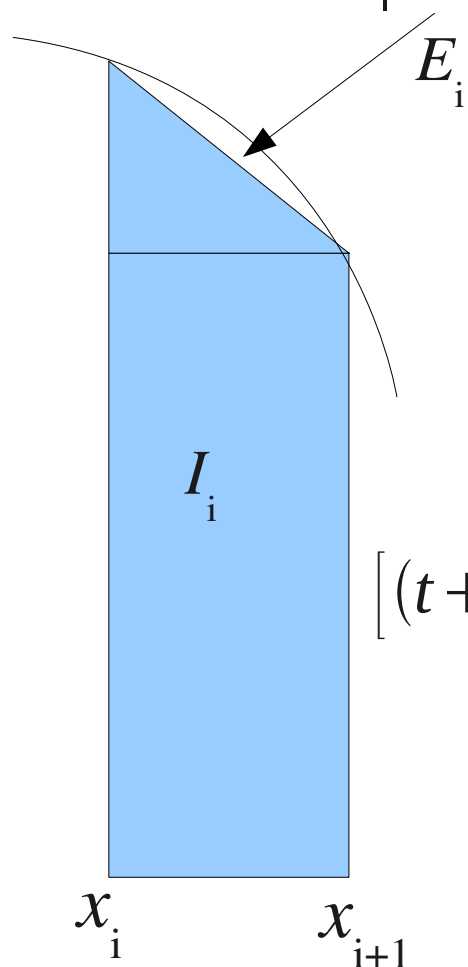
$$h f(x_{i+1}) - \int_0^h t f' dt \Rightarrow \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx - h f(x_{i+1}) \right| < K \frac{h^2}{2} = E_i$$



$$E_{tot} = \sum_{i=1}^N E_i = \tilde{K} N \frac{(b-a)^2}{2 N^2} = \frac{\tilde{K}}{2} \frac{(b-a)^2}{N}$$

Odvození chyby lichběžníkové metody pomocí 2x integrace per partes.

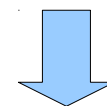
$$\left| \int_a^b f(x) dx - \frac{h}{2} \sum_{i=1}^N [f(x_i) + f(x_{i+1})] \right| < \frac{M}{12} \frac{(b-a)^3}{N^2} = E_{tot}$$



$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \int_0^h f(t + x_i) dt =$$

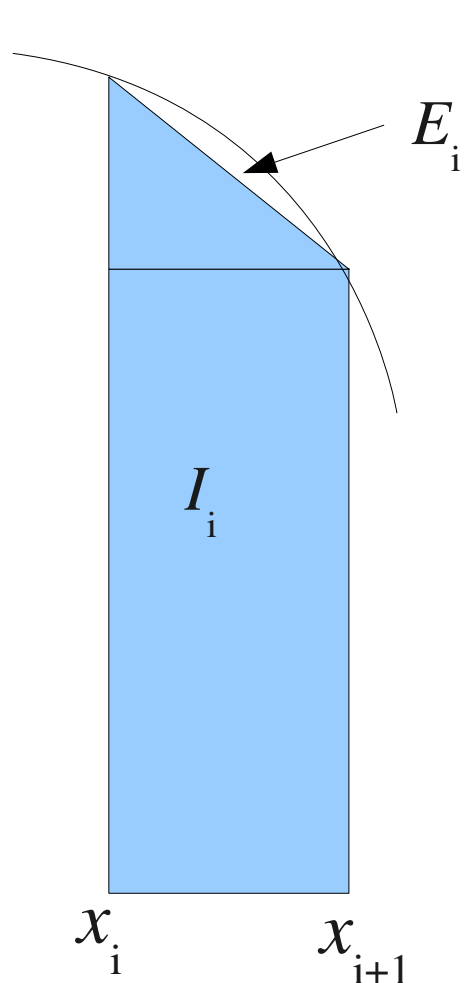
$$\left[(t + A) f(t + x_i) \right]_0^h - \int_0^h (t + A) f' dt =$$

$$\left[(t + A) f(t + x_i) \right]_0^h - \left[\left(\frac{(t + A)^2}{2} + B \right) f' \right]_0^h + \int_0^h \left[\left(\frac{(t + A)^2}{2} + B \right) \right] f'' dt$$



POKRAČOVÁNÍ NA DALŠÍ STRANĚ

$$\begin{aligned} \dots &= (h+A)f(x_{i+1}) - Af(x_i) - \left(\frac{(t+A)^2}{2} + B\right)f'(x_{i+1}) + \left(\frac{A^2}{2} + B\right)f'(x_i) + \\ &+ \int_0^h \left(\frac{(t+A)^2}{2} + B\right)f'' dt \rightarrow \left(\frac{(t+A)^2}{2} + B\right)=0 \text{ a } \left(\frac{(t+A)^2}{2} + B\right)=0 \end{aligned}$$



$$A = -\frac{h}{2} \text{ a } B = \frac{h^2}{8}$$

POKRAČOVÁNÍ NA DALŠÍ STRANĚ