

Uvažujme soustavu čtyř rovnic pro čtyři neznámé x, y, z a w ,

$$x - 2y + 3z + 4w = 1$$

$$3x + y - 2z + w = 2$$

$$-4x + 3y + z - 3w = 3$$

$$-2x - y + 2z + 4w = -1$$

Předchozí soustava v maticovém zápisu

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Matrice soustavy – řešená postupným uplatněním ekvivalentních úprav

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 2 & 4 & -1 \end{array} \right)$$

Předchozí matice soustavy převedená do diagolinazovaného tvaru, kde (x_0, y_0, z_0, w_0) je řešení soustavy.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w_0 \end{array} \right)$$

Za předpokladu, že na diagonále jsou nenulové prvky k diagonalizaci matice soustavy vede následující algoritmus:

pro všechny řádky i matice M proved'

vynásob i -tý řádek číslem $1/M[i][i]$

pro všechny řádky $j \neq i$ proved'

k j -tému řádku **přičti** $-M[j][i]$ **násobek** i -tého řádku

```
int solve_system(double **m, double *x, int nr, int nc)
{
    int irow, icol, jrow;
    double r;
    // prevod soustavy (m|b) na diagonalni tvar
    for (irow=0; irow<nr; irow++)
    {
        icol=irow;
        mult_matrix_row(m, 1.0/m[irow][irow], irow, nc);
        for (jrow=0; jrow<nr; jrow++)
        {
            if (jrow!=irow)
            {
                r=-m[jrow][icol];
                add_matrix_row(m, r, irow, jrow, nc);
            }
        }
    }

    for (irow=0; irow<nr; irow++) x[irow]=m[irow][nc-1];

    return 0;
}
```

Matici A lze rozložit na dvě matice L a U takto

$$L \cdot U = A$$

Pro matici 4x4 tento rozklad vypadá následovně

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \beta_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

LU dekompozicí (rozkladem) matice \mathbf{A} lze řešit soustavu Lineárních rovnic následovně

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot (\mathbf{U} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

Nejprve tedy vyřešíme rovnici

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (*)$$

a následně rovnici

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad (**)$$

Postupnou substitucí dostaneme z rovnice (*) výsledek

$$y_1 = \frac{b_1}{\alpha_{11}}, \quad y_i = \frac{1}{\alpha_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} y_j \right]$$

kde $i=2,3,\dots,N$

Zpětnou substitucí dostaneme z druhé rovnice (**)
výsledek

$$x_N = \frac{y_N}{\beta_{NN}}, \quad x_i = \frac{1}{\beta_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^N \beta_{ij} x_j \right]$$

kde $i=N-1,N-2,\dots,1$

Croutův algoritmus LU dekompozice

$$\alpha_{i1} \beta_{1j} + \dots = a_{ij}$$

Tři způsoby zápisu prvku a_{ij}

$$i < j : \alpha_{i1} \beta_{1j} + \alpha_{i2} \beta_{2j} + \dots + \alpha_{ii} \beta_{ij} = a_{ij} \quad (1)$$

$$i = j : \alpha_{i1} \beta_{1j} + \alpha_{i2} \beta_{2j} + \dots + \alpha_{ii} \beta_{jj} = a_{ij} \quad (2)$$

$$i > j : \alpha_{i1} \beta_{1j} + \alpha_{i2} \beta_{2j} + \dots + \alpha_{ij} \beta_{jj} = a_{ij} \quad (3)$$

Máme N^2 rovnic pro $N^2 + N$ neznámých prvků α a β .

$$\Rightarrow \alpha_{ii} \equiv 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (4)$$

Algoritmus LU dekompozice sestává z následujících kroků

- Nastav $\alpha_{ii}=1$ pro $i=1,2,\dots,N$
- Pro každé $j=1,2,3,\dots,N$ proved' následující
 - Pro $i=1,2,\dots,j$ použij rovnice (1), (2) a (4) k nalezení β_{ij}

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik} \beta_{kj}$$

- Pro $i=j+1, j+2,\dots,N$ použij rovnici (3) a urči prvky α_{ij}

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\beta_{jj}} \left(\alpha_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_{ik} \beta_{kj} \right)$$

Výše zmíněný iterativní proces pak vede na matici